数理解析研究所講究録
1128 巻 2000 年 127-135

2 階準線形楕円型方程式系の正値全域解について

広島大・理　寺本 智光 (Tomomitsu Teramoto)

1 序

次の準線形楕円型方程式系の球対称な正値全域解の存在について考える.

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta_p u \equiv \mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) = f(|x|, u, v) \\ \Delta_q v \equiv \mathrm{div}(|Dv|^{q-2}Dv) = g(|x|, u, v) \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで $N \geq 1,\ p, q > 1$. $f,\ g$ についての条件は次の通り:

(H1) $f, g : (\overline{\mathbf{R}}_+)^3 \to \overline{\mathbf{R}}_+, \overline{\mathbf{R}}_+ = [0, \infty)$ は連続で $f(r, u, v),\ g(r, u, v)$ は u, v に関して非減少.

(H2) $(r, u, v) \in (\overline{\mathbf{R}}_+)^3$ に対して $\lambda^{1-p} f(r, \lambda u, \lambda v),\ \lambda^{1-q} g(r, \lambda u, \lambda v)$ は $\lambda > 0$ に関して非減少で次を満たす.

$$\lim_{\lambda \to +0} \lambda^{1-p} f(r, \lambda u, \lambda v) = \lim_{\lambda \to +0} \lambda^{1-q} g(r, \lambda u, \lambda v) = 0.$$

(H3) $(r, u, v) \in (\overline{\mathbf{R}}_+)^3$ に対して $\lambda^{1-p} f(r, \lambda u, \lambda v),\ \lambda^{1-q} g(r, \lambda u, \lambda v)$ は $\lambda > 0$ に関して非増加で次を満たす.

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{1-p} f(r, \lambda u, \lambda v) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{1-q} g(r, \lambda u, \lambda v) = 0.$$

関数 (u, v) が $u, v \in C^1(\mathbf{R}^N)$ かつ $|Du|^{p-2}Du, |Dv|^{q-2}Dv \in C^1(\mathbf{R}^N)$ で (1) を満たすとき, (1) の全域解と呼ぶ.

$f,\ g$ の例としては

$$f(r, u, v) = h(r)v^\alpha,\ g(r, u, v) = k(r)u^\beta,$$

等がある. ただし $h,\ k$ は連続で $h(r) \geq 0,\ k(r) \geq 0,\ r \geq 0.$ $\alpha > p-1,\ \beta > q-1$ のときは (H2) を満たし, $0 < \alpha < p-1,\ 0 < \beta < q-1$ のときは (H3) を満たす.

この例の f, g で (H2) を満たすとする. $h(r) \sim Cr^{-\lambda},\ k(r) \sim Cr^{-\mu}$ の場合, ただし $C > 0$ は定数, 球対称な正値全域解の存在と非存在は完全にわかっている (参考文献 [2, 3]).

2 主結果

定理 1. f, g は $\{(\mathrm{H1}),(\mathrm{H2})\}$ 又は $\{(\mathrm{H1}),(\mathrm{H3})\}$ を満たすとする. さらに

$$(2)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty r^{\sigma-1} f(r, c\phi(r), c\psi(r))dr < \infty \\ \displaystyle\int_1^\infty r^{\tau-1} g(r, c\phi(r), c\psi(r))dr < \infty \end{cases} \quad \text{for some } c > 0$$

を満たすとする, ただし c は定数,

$$\sigma = \begin{cases} p, & p < N,\ 1 < p \leq 2, \\ \exists p' \in (p, N], & 2 < p < N, \\ N, & p \geq N, \end{cases} \quad \tau = \begin{cases} q, & q < N,\ 1 < q \leq 2, \\ \exists q' \in (q, N], & 2 < q < N, \\ N, & q \geq N, \end{cases}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} 1, & p < N, \\ \log r, & p = N, \\ r^{\frac{p-N}{p-1}}, & p > N, \end{cases} \quad \psi(r) = \begin{cases} 1, & q < N, \\ \log r, & q = N, \\ r^{\frac{q-N}{q-1}}, & q > N. \end{cases}$$

このとき

$$(3)\qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{u(x)}{\phi(|x|)} = \mathrm{const} > 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \frac{v(x)}{\psi(|x|)} = \mathrm{const} > 0$$

を満たす (1) の球対称な正値全域解 (u, v) が存在する.

定理 2. f, g は $\{(\mathrm{H1}),(\mathrm{H2})\}$ 又は $\{(\mathrm{H1}),(\mathrm{H3})\}$ を満たすとする. さらに

$$(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty r^{\min\{p,N\}-1} f(r, c\hat{\phi}(r), c\hat{\psi}(r))dr < \infty \\ \displaystyle\int_1^\infty r^{\min\{q,N\}-1} g(r, c\hat{\phi}(r), c\hat{\psi}(r))dr < \infty \end{cases} \quad \text{for some } c > 0$$

を満たすとする, ただし c は定数,

$$\hat{\phi}(r) = \begin{cases} \log r, & p \leq N, \\ r^{\frac{p-N}{p-1}}, & p > N, \end{cases} \quad \hat{\psi}(r) = \begin{cases} \log r, & q \leq N, \\ r^{\frac{q-N}{q-1}}, & q > N. \end{cases}$$

このとき (1) の球対称な正値全域解 (u, v) が存在する.

注意 1. $p \geq N$, $q \geq N$ の場合, 定理 2 の条件は 定理 1 の条件と同じになる. 従って, この場合には定理 1 と同じ結果 (3) が成り立つ.

3 定理の証明

定理の証明の前に補題を準備する.

記号: r_*, 集合 L^1_λ, $\lambda > 0$ を

$$r_* = \max\{1, r\}, \ r \geq 0,$$

$$L^1_\lambda = \left\{ g \ ; \ g \text{ は可測}, \ \int_0^\infty t^\lambda |g(t)| dt < \infty \right\}$$

で定義する. 次の積分作用素を考える.

$$(J_{N,m}g)(r) = \int_0^r \left(s^{1-N} \int_0^s t^{N-1} g(t) dt \right)^{\frac{1}{m-1}} ds,$$

ただし $m > 1$, $g(r) \geq 0, r \geq 0$ は連続. この積分作用素 $J_{N,m}$ に対して次の補題が成り立つ.

補題. (i) $N > m$, $1 < m \leq 2$, $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \cap L^1_{m-1}$, $g(r) \geq 0$, $r \geq 0$ とする. このとき次が成り立つ.

$$0 \leq (J_{N,m}g)(r) \leq \frac{m-1}{N-m} \left(\int_0^\infty s^{m-1} g(s) ds \right)^{\frac{1}{m-1}}, \ r \geq 0.$$

(ii) $N > m > 2$, $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \cap L^1_{m'-1}$, $m' \in (m, N]$, $g(r) \geq 0$, $r \geq 0$ とする. このとき次が成り立つ.

$$0 \leq (J_{N,m}g)(r) \leq \frac{m'-1}{m'-m} \left(\int_0^\infty s_*^{m'-1} g(s) ds \right)^{\frac{1}{m-1}}, \ r \geq 0.$$

(iii) $m < N$, $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \cap L^1_{m-1}$, $g(r) \geq 0$, $r \geq 0$ とする. このとき次が成り立つ.

$$0 \leq (J_{N,m}g)(r) \leq \left(\int_0^\infty s_*^{m-1} g(s) ds \right)^{\frac{1}{m-1}} \log(er_*), \quad r \geq 0.$$

(iv) $N \leq m$, $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \cap L^1_{N-1}$, $g(r) \geq 0$, $r \geq 0$ とする. このとき次が成り立つ.

$$0 \leq (J_{N,m}g)(r) \leq \frac{m-1}{m-N} \left(\int_0^\infty s_*^{N-1} g(s) ds \right)^{\frac{1}{m-1}} r_*^{\frac{m-N}{m-1}}, \ r \geq 0, \text{ for } N < m,$$

$$0 \leq (J_{N,m}g)(r) \leq \left(\int_0^\infty s_*^{N-1} g(s) ds \right)^{\frac{1}{m-1}} \log(er_*), \ r \geq 0, \text{ for } N = m.$$

補題の証明. ここでは (iii) を証明する. $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \cap L^1_{m-1}$, $g(r) \geq 0$ とする. $0 \leq r \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} (J_{N,m}g)(r) &\leq \int_0^r \left(\int_0^s g(t) dt \right)^{\frac{1}{m-1}} ds \\ &\leq \left(\int_0^r g(s) ds \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad 0 \leq r \leq 1. \end{aligned}$$

$r > 1$ のとき.

$$\begin{aligned}(J_{N,m}g)(r) &= \int_0^1 \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}g(t)dt\right)^{\frac{1}{m-1}} ds + \int_1^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-m+m-1}g(t)dt\right)^{\frac{1}{m-1}} ds \\ &\leq \left(\int_0^1 g(t)dt\right)^{\frac{1}{m-1}} + \int_1^r s^{-1}\left(\int_0^s t^{m-1}g(t)dt\right)^{\frac{1}{m-1}} ds.\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_1^r s^{-1}\left(\int_0^s t^{m-1}g(t)dt\right)^{\frac{1}{m-1}} ds &\leq \int_1^r s^{-1}\left(\int_0^r t^{m-1}g(t)dt\right)^{\frac{1}{m-1}} ds \\ &= \left(\int_0^r s^{m-1}g(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}} \log r.\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}(J_{N,m}g)(r) &\leq \left(\int_0^1 g(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}} + \left(\int_0^\infty s^{m-1}g(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}} \log r \\ &\leq \left(\int_0^\infty s_*^{m-1}g(s)ds\right)^{\frac{1}{m-1}} \log(er_*).\end{aligned}$$

(i),(ii),(iv) の証明は 参考文献 [1] を参照. (証明終)

次に定理の証明にはいる. 定理 1では $p<N$, $q<N$, 定理 2では $p \leq N$, $q \leq N$ の場合を証明する.

定理 1の略証. 条件 (2) は次のように書ける.

$$\int_0^\infty t_*^{\tilde{p}-1}f(t,c,c)dt < \infty, \quad \int_0^\infty t_*^{\tilde{q}-1}g(t,c,c)dt < \infty. \tag{5}$$

ただし

$$\tilde{p} = \begin{cases} p, & 2 \geq p > 1, \\ p', & p > 2, \end{cases} \qquad \tilde{q} = \begin{cases} q, & 2 \geq q > 1, \\ q', & q > 2. \end{cases}$$

(u,v) を (1) の球対称な正値全域解とすると (u,v) は次の常微分方程式系を満たす.

$$\begin{cases} (r^{N-1}|u'|^{p-2}u')' = r^{N-1}f(r,u,v), & r>0, \quad u'(0)=0, \\ (r^{N-1}|v'|^{q-2}v')' = r^{N-1}g(r,u,v), & r>0, \quad v'(0)=0. \end{cases} \tag{6}$$

(6) を 2 回積分して, (6) と同値な次の積分方程式系を得る.

$$\begin{cases} u(r) = \alpha + \displaystyle\int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}f(t,u(t),v(t))dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds, & r \geq 0, \\ v(r) = \beta + \displaystyle\int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}g(t,u(t),v(t))dt\right)^{\frac{1}{q-1}} ds, & r \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

ここで $\alpha=u(0)$, $\beta=v(0)$. 従って (7) を解けばよい.

まず α, βを次のようにとる.

$$M(N,p)\left(\int_0^\infty s_*^{\tilde{p}-1}f(s,2\alpha,2\beta)ds\right)^{\frac{1}{p-1}}\le\alpha,$$

$$M(N,q)\left(\int_0^\infty s_*^{\tilde{q}-1}g(s,2\alpha,2\beta)ds\right)^{\frac{1}{q-1}}\le\beta,$$

ここで

$$M(N,p)=\begin{cases}\dfrac{p-1}{N-p}, & p\le 2,\\ \dfrac{p'-1}{p'-p}, & p>2,\end{cases}\qquad M(N,q)=\begin{cases}\dfrac{q-1}{N-q}, & q\le 2,\\ \dfrac{q'-1}{q'-q}, & q>2.\end{cases}$$

(H2), (H3) と Lebesgue の収束定理から, このような α, β をとることは可能である.

集合 Y を次で定義する.

$$Y=\{(u,v)\in C(\overline{\mathbf{R}}_+)\times C(\overline{\mathbf{R}}_+);\ \alpha\le u(r)\le 2\alpha,\ \beta\le v(r)\le 2\beta,\ r\ge 0\}.$$

明らかに集合 Y は $C(\overline{\mathbf{R}}_+)\times C(\overline{\mathbf{R}}_+)$ の閉凸部分集合である. 写像 $\mathcal{F}:Y\to C(\overline{\mathbf{R}}_+)\times C(\overline{\mathbf{R}}_+)$ を次で定義する.

$$\mathcal{F}(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v}),$$

ここで

$$\tilde{u}(r)=\alpha+[J_{N,p}f(\cdot,u,v)](r)=\alpha+\int_0^r\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}f(t,u(t),v(t))dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds,$$

$$\tilde{v}(r)=\beta+[J_{N,q}g(\cdot,u,v)](r)=\beta+\int_0^r\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}g(t,u(t),v(t))dt\right)^{\frac{1}{q-1}}ds.$$

(I) $\mathcal{F}(Y)\subset Y$. $(u,v)\in Y$とする. $\tilde{u}(r)\ge\alpha$, $\tilde{v}(r)\ge\beta$ は明らか. 補題の (i),(ii) より

$$\begin{aligned}[J_{N,p}f(\cdot,u,v)](r) &= \int_0^r\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}f(t,u(t),v(t))dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds\\ &\le \int_0^r\left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1}f(t,2\alpha,2\beta)dt\right)^{\frac{1}{p-1}}ds\\ &\le M(N,p)\left(\int_0^\infty s_*^{\tilde{p}-1}f(s,2\alpha,2\beta)ds\right)^{\frac{1}{p-1}}\\ &\le \alpha.\end{aligned}$$

従って

$$\tilde{u}(r)=\alpha+[J_{N,p}f(\cdot,u,v)](r)\le\alpha+\alpha=2\alpha.$$

同様にして $\tilde{v}(r) \le 2\beta$ を示すことができる．よって $\mathcal{F}(Y) \subset Y$.

(II)$\mathcal{F}$:連続, (III) $\mathcal{F}(Y)$:相対コンパクト も示すことができる.

従って Schauder-Tychonoff の不動点定理より $(u,v) = \mathcal{F}(u,v)$ なる $(u,v) \in Y$が存在する．さらに $\lim_{r\to\infty} u(r) = u_\infty \in [\alpha, 2\alpha]$, $\lim_{r\to\infty} v(r) = v_\infty \in [\beta, 2\beta]$ が示せる．よってこの不動点 (u,v) が求める解である.

以上が $p < N$, $q < N$ の場合である. $p < N, q < N$ 以外の場合, まず α, β を次のようにとる.

$$M_1 \left(\int_0^\infty t_*^{\sigma-1} f(t, 2\alpha\phi(t_*), 2\beta\psi(t_*))dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \le \alpha,$$

$$M_2 \left(\int_0^\infty t_*^{\tau-1} g(t, 2\alpha\phi(t_*), 2\beta\psi(t_*))dt \right)^{\frac{1}{q-1}} \le \beta,$$

ただし

$$M_1 = \begin{cases} M(N,p), & p < N, \\ 1, & p = N, \\ \dfrac{p-1}{p-N}, & p > N, \end{cases} \quad M_2 = \begin{cases} M(N,q), & q < N, \\ 1, & q = N, \\ \dfrac{q-1}{q-N}, & q > N. \end{cases}$$

集合 Y を次で定義する.

$$Y = \left\{ (u,v) \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \times C(\overline{\mathbf{R}}_+); \alpha \le u(r) \le 2\alpha\phi(r),\ \beta \le v(r) \le 2\beta\psi(r), r \ge 0 \right\}.$$

写像 $\mathcal{F}$ を上で出てきたもので定義する. Schauder-Tychonoff の不動点定理を使って不動点を得る（$\mathcal{F}(Y) \subset Y$ を示すために補題 (iv) を使う）．さらに l'Hospital の定理より

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \frac{u(r)}{\log r} &= \lim_{r\to\infty} ru'(r) \\ &= \left(\int_0^\infty s^{N-1} f(s, u(s), v(s))ds \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{for} \quad p = N, \\ \lim_{r\to\infty} \frac{u(r)}{r^{(p-N)/(p-1)}} &= \frac{p-1}{p-N} \lim_{r\to\infty} \frac{u'(r)}{r^{(1-N)/(p-1)}} \\ &= \frac{p-1}{p-N} \left(\int_0^\infty s^{N-1} f(s, u(s), v(s))ds \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{for} \quad p > N. \end{aligned}$$

従って (3) を得る. v についても同様にして (3) を得る.（証明終）

定理 2の略証. 積分条件は次のように書ける.

$$\int_0^\infty t_*^{p-1} f(t, c\log(et_*), c\log(et_*))dt < \infty, \quad \int_0^\infty t_*^{q-1} g(t, c\log(et_*), c\log(et_*))dt < \infty.$$

定理 1の証明と同様, (7) を解けばよい. $\alpha>0$, $\beta>0$ を次のようにとる.

$$\left(\int_0^\infty t_*^{p-1} f(t, 2\alpha\log(et_*), 2\beta\log(et_*))dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \le \alpha,$$

$$\left(\int_0^\infty t_*^{q-1} g(t, 2\alpha\log(et_*), 2\beta\log(et_*))dt\right)^{\frac{1}{q-1}} \le \beta.$$

(H2),(H3) と Lebesgue の収束定理より, このような α, β をとることは可能である.

集合 Y を

$$Y = \left\{(u,v) \in C(\overline{\mathbf{R}}_+) \times C(\overline{\mathbf{R}}_+) : \begin{array}{c} \alpha \le u(r) \le 2\alpha\log(er_*) \\ \beta \le v(r) \le 2\beta\log(er_*) \end{array}, \ r \ge 0\right\}$$

とし, 写像 $\mathcal{F}: Y \to C(\overline{\mathbf{R}}_+) \times C(\overline{\mathbf{R}}_+)$ を次で定義する.

$$\mathcal{F}(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$$

ここで $\tilde{u}(r), \tilde{v}(r)$ は 定理 1の証明で出てきたものとする.

(I) $\mathcal{F}(Y) \subset Y$. $(u,v) \in Y$ とする. $\tilde{u}(r) \ge \alpha, \tilde{v}(r) \ge \beta$ は明らか. 補題 (iii) より

$$\begin{aligned}
[J_{N,p} f(\cdot, u, v)](r) &= \int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1} f(t, u(t), v(t))dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
&\le \int_0^r \left(s^{1-N}\int_0^s t^{N-1} f(t, 2\alpha\log(et_*), 2\beta\log(et_*))dt\right)^{\frac{1}{p-1}} ds \\
&\le \left(\int_0^\infty t_*^{p-1} f(t, 2\alpha\log(et_*), 2\beta\log(et_*))dt\right)^{\frac{1}{p-1}} \log(er_*) \\
&\le \alpha\log(er_*)
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(r) &= \alpha + [J_{N,p} f(\cdot, u, v)](r) \\
&\le \alpha + \alpha\log(er_*) \\
&\le 2\alpha\log(er_*)
\end{aligned}$$

同様に $\tilde{v}(r) \le 2\beta\log(er_*)$ も示せる. 従って $\mathcal{F}(Y) \subset Y$. (II)$\mathcal{F}$: 連続 , (III)$\mathcal{F}(Y)$: 相対コンパクト, も示すことができる. 従って Schauder-Tychonoff の不動点定理より, 不動点 $(u,v) \in Y$ が存在する. この不動点が求める解である. $p \le N$, $q \le N$ 以外の場合も同様にして示すことができる. (証明終)

注意 2. $p<N$, $q=N$ の場合を考える. 上の証明より u については

$$0 \le u(r) \le \log(er_*), \quad r \ge 0$$

がわかる. 一方 v については, 定理 1の証明と同じである. 従って

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{v(x)}{\log|x|}=\text{const}>0$$

を示すことができる. 同様にして $q>N$ の場合には

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{v(x)}{|x|^{(q-N)/(q-1)}}=\text{const}>0$$

を示すことができる ($p\geq N,\ q<N$ の場合も同様).

4 例

次の方程式系を考える.

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta_p u=\dfrac{1}{(1+|x|)^p(\log(2+|x|))^\lambda}v^\alpha \\ \Delta_q v=\dfrac{1}{(1+|x|)^q(\log(2+|x|))^\mu}u^\beta \end{cases} \qquad x\in\mathbf{R}^N,$$

ここで $1<p,\ q<N,\ \alpha>p-1,\ \beta>q-1,\ \lambda>\alpha+1,\ \mu>\beta+1.$

この Example で f,g は

$$f(r,u,v)=\frac{1}{(1+|x|)^p(\log(2+|x|))^\lambda}v^\alpha,\quad g(r,u,v)=\frac{1}{(1+|x|)^q(\log(2+|x|))^\mu}u^\beta$$

である. $f,\ g$ が定理 1, 2 の条件を満たすかどうか調べる.

$p,q>2$ のとき. $\forall p'\in(p,N],\ \forall q'\in(q,N],\ \forall c>0$ に対して

$$\int_1^\infty t^{p'-1}f(r,c,c)dt=\infty,\ \int_1^\infty t^{q'-1}g(r,c,c)dt=\infty$$

となる. 従って定理 1の条件を満たさない. 一方 $c=1$ として

$$\int_1^\infty t^{p-1}f(r,\log t,\log t)dt<\infty,\ \int_1^\infty t^{q-1}g(r,\log t,\log t)dt<\infty$$

となり定理 2の条件を満たす. よって (8) の球対称な正値全域解 (u,v) が存在する. 従って $p,\ q>2$ のとき定理 2のほうがよい.

$1<p,q\leq 2$ のとき. $c=1$ として

$$\int_1^\infty t^{p-1}f(r,1,1)dt<\infty,\ \int_1^\infty t^{q-1}g(r,1,1)dt<\infty$$

となり 定理 1の条件を満たす. よって

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \mathrm{const} > 0, \ \lim_{|x|\to\infty} v(x) = \mathrm{const} > 0$$

を満たす (8) の球対称な正値全域解 (u,v) が存在する. 定理 2の条件も満たすが, 解の存在しかわからない. 従って $1 < p,\ q \leq 2$ のとき定理 1のほうがよい.

参考文献

[1] Y. Furusho, T. Kusano and A. Ogata, *Symmetric positive entire solutions of second order quasilinear degenerate elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal, 127 (1994), 231-253.

[2] T. Teramoto, *Existence and nonexistence of positive radial entire solutions of second order quasilinear ellitic systems*, preprint.

[3] 寺本智光, 2階準線形楕円型方程式系の球対称な正値全域解の存在と非存在, 日本数学会１９９９年度秋季総合分科会 函数方程式論分科会 講演アブストラクト, 52-53